2 恒等式・割り算の問題

A

8

$x-2y+z=4$ より，$z=4-x+2y$ ・・・①

これを $2x+y-3z=-7$ に代入し，整理すると，$5x-5y=5$ $\therefore y=x-1$ ・・・②

②を①に代入し，整理すると，$z=x+2$ ・・・③

②，③を $ax^2+2by^2+3cz^2=18$ に代入し，左辺を x について整理すると，

$(a+2b+3c)x^2+(-4b+12c)x+2b+12c=18$

これは x の恒等式だから，$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ -4b+12c=0 \\ 2b+12c=18 \end{cases}$ これを解くことにより，$a=-9,\ b=3,\ c=1$

9

与式を x について降べきの順に整理すると，$x^2-(y-a)x-2y^2-y+1$

ここで，$x^2-(y-a)x-2y^2-y+1=0$ を x についての 2 次方程式とみなすと，

解の公式により，

$$x=\frac{y-a\pm\sqrt{\{-(y-a)\}^2-4(-2y^2-y+1)}}{2}$$
$$=\frac{y-a\pm\sqrt{9y^2-2(a-2)y+a^2-4}}{2}$$

よって，

$$x^2-(y-a)-2y^2-y+1$$
$$=\left(x-\frac{y-a+\sqrt{9y^2-2(a-2)y+a^2-4}}{2}\right)\left(x-\frac{y-a-\sqrt{9y^2-2(a-2)y+a^2-4}}{2}\right)$$

これが 1 次式の積であるならば，$\sqrt{9y^2-2(a-2)y+a^2-4}$ は 1 次式である。

このとき $9y^2-2(a-2)y+a^2-4=0$ は重解をもつから，

判別式を D とすると，

$D=0$ および $\dfrac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-9(a^2-4)=-4(2a^2+a-10)$ より，$2a^2+a-10=0$

これと $2a^2+a-10=(2a+5)(a-2)$ より，$a=-\dfrac{5}{2},\ 2$

逆に $a=-\dfrac{5}{2},\ 2$ のとき，$x^2-(y-a)-2y^2-y+1$ は 1 次式の積に因数分解できる。

よって，$a=-\dfrac{5}{2},\ 2$

10

$f(x)$ を $x^2+\alpha$ で割った余り

割り算を実行すると，$f(x)=(x^2+\alpha)(x^2+2x-\alpha+10)+2(5-\sqrt{2}-\alpha)x+\alpha^2-10\alpha+23$

よって，余りは $2(5-\sqrt{2}-\alpha)x+\alpha^2-10\alpha+23$

$f(x)$ を実数の範囲で因数分解

$f(x)=(x^2+\alpha)(x^2+2x-\alpha+10)+2(5-\sqrt{2}-\alpha)x+\alpha^2-10\alpha+23$ において，

余り $2(5-\sqrt{2}-\alpha)x+\alpha^2-10\alpha+23$ が 0 となる α が，

すなわち $5-\sqrt{2}-\alpha=0$ かつ $\alpha^2-10\alpha+23=0$ を満たす α が存在すればよく，

このとき $f(x)$ は実数の範囲で因数分解され，$f(x)=(x^2+\alpha)(x^2+2x-\alpha+10)$ となる。

そこで，連立方程式 $\begin{cases}5-\sqrt{2}-\alpha=0\\ \alpha^2-10\alpha+23=0\end{cases}$ を解くと，

$5-\sqrt{2}-\alpha=0$ の解は $\alpha=5-\sqrt{2}$，$\alpha^2-10\alpha+23=0$ の解は $\alpha=5\pm\sqrt{2}$ だから，$\alpha=5-\sqrt{2}$

これを $f(x)=(x^2+\alpha)(x^2+2x-\alpha+10)$ に代入すると，

$f(x)=(x^2+5-\sqrt{2})(x^2+2x+5+\sqrt{2})$　$\therefore (x^2+5-\sqrt{2})(x^2+2x+5+\sqrt{2})$

11

A, B は t についての 2 次方程式 $t^2-(A+B)t+AB=0$　・・・①　の解である。

条件より，$4x^3-2x^2-9x+7=AB+x+1$　$\therefore AB=4x^3-2x^2-10x+6$　・・・②

また，$A+B=2x^2+4x-5$　・・・③

②，③を①に代入すると，

$t^2-(2x^2+4x-5)t+4x^3-2x^2-10x+6=0$

解の公式により，

$$t=\frac{2x^2+4x-5\pm\sqrt{\{-(2x^2+4x-5)\}^2-4(-2x^2-10x+6)}}{2}$$

$$=\frac{2x^2+4x-5\pm(2x^2+1)}{2}$$

$$=2x^2+2x-2,\ 2x-3$$

また，$4x^3-2x^2-9x+7$ を多項式 A で割った余りが $x+1$ であることから，

多項式 A の次数は 1 より大きい。

よって，$A=2x^2+2x-2,\ B=2x-3$

12

$x=1$ のとき

$-7f(2)=0$ より，$f(2)=0$　・・・①

$x=2$ のとき

$-6f(4)=8f(2)$

これと①より，$f(4)=0$　・・・②

$x=4$ のとき

$-4f(8)=24f(4)$

これと②より，$f(8)=0$　・・・③

①，②，③および $f(x)$ の x^3 の係数が 1 であることから，

$f(x)=(x-2)(x-4)(x-8)$

$\quad =x^3-14x^2+56x-64$

逆に，$f(x)=(x-2)(x-4)(x-8)$ とすると，

$(x-8)f(2x)=(x-8)(2x-2)(2x-4)(2x-8)=8(x-8)(x-1)(x-2)(x-4)$

$8(x-1)f(x)=8(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)$ となり，すべての実数 x に対して

$(x-8)f(2x)=8(x-1)f(x)$ を満たす。

よって，$f(x)=x^3-14x^2+56x-64$

13

$P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割った商を $A(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると，

$P(x)=(x+1)^2(x-2)A(x)+ax^2+bx+c$　・・・①　と表される。

また，$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $18x+9$ であることから，

余り ax^2+bx+c は $a(x+1)^2+18x+9$　・・・②　と表せる。

よって，①，②より，$P(x)=(x+1)^2(x-2)A(x)+a(x+1)^2+18x+9$

これと，$P(x)$ を $x-2$ で割った余りが 9，すなわち $P(2)=9$ より，

$a(2+1)^2+18\cdot 2+9=9$　$\therefore a=-4$

これを②に代入し，整理することにより，$-4x^2+10x+5$

B

14

(1)

$f(0)=1$ より，$f(x)=ax^2+bx+1$ とおくと，$f(x^2)=ax^4+bx^2+1$

したがって，$f(x^2)$ を $f(x)$ で割った商を x^2+cx+1 とおくと，

$ax^4+bx^2+1=(ax^2+bx+1)(x^2+cx+1)$

すなわち $ax^4+bx^2+1=ax^4+(ac+b)x^3+(a+bc+1)x^2+(b+c)x+1$

これは x についての恒等式だから，

$ac+b=0$ ・・・①

かつ

$a+bc+1=b$ ・・・②

かつ

$b+c=0$ ・・・③

③より，$b=-c$ ・・・④

④を①，②に代入し，それぞれを整理すると，

$c(a-1)=0$ ・・・⑤

かつ

$c^2-c-a-1=0$ ・・・⑥

⑤より，$c=0$ または $a=1$

したがって，

$c=0$ のとき

④より $b=0$，⑥より $a=-1$

$a=1$ のとき

⑥を整理すると，$(c+1)(c-2)=0$

これと④より，$(b,\ c)=(1,\ -1),\ (-2,\ 2)$

よって，$(a,\ b,\ c)=(-1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ -1),\ (1,\ -2,\ 2)$

ゆえに，$f(x)$ は $-x^2+1,\ x^2+x+1,\ x^2-2x+1$

補足

$f(x^2)$ を $f(x)$ で割りし，余りが 0 となるような $a,\ b$ を求めてもよい。

(2)

解法 1

$P(x)$を$x(x-1)$で割った商を$A(x)$，余りを$ax+b$とすると，$P(x)=x(x-1)A(x)+ax+b$

よって，$P(0)=b$，$P(1)=a+b$

これと$P(0)=1$，$P(1)=2$より，$b=1,\ a+b=2\quad \therefore a=b=1$

ゆえに，$P(x)=x(x-1)A(x)+x+1$

これより，

$$
\begin{aligned}
P(x)&=x(x-1)A(x)+x+1\\
&=\{(x-2)(x+1)+2\}A(x)+(x-2)+3\\
&=(x-2)(x+1)A(x)+(x-2)+2A(x)+3\\
&=(x-2)\{(x+1)A(x)+1\}+2A(x)+3
\end{aligned}
$$

よって，$P(2)=2A(2)+3$

これと$P(2)=0$より，$2A(2)+3=0\quad \therefore A(2)=-\dfrac{3}{2}$

ここで，$A(x)$を定数とすると，$A(x)=-\dfrac{3}{2}$

よって，$P(x)=x(x-1)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+x+1=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{2}x+1$

最高次の係数が 1 でないから，不適

$A(x)=x+\alpha$とすると，$A(2)=2+\alpha$より，$2+\alpha=-\dfrac{3}{2}$すなわち$\alpha=-\dfrac{7}{2}\quad \therefore A(x)=x-\dfrac{7}{2}$

よって，

$$
\begin{aligned}
P(x)&=x(x-1)\left(x-\frac{7}{2}\right)+x+1\\
&=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1
\end{aligned}
$$

これは最高次の係数が 1 であることを満たす。

ゆえに，条件を満たす整式$P(x)$で最も次数の低いものは$P(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}x+1$

解法 2

ポイント

$P(2)=0,\ P(0)=1,\ P(1)=2$ の 3 つしかないから，

$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ とおいて，

$n=0$ から順に調べればすぐ見つかる。

解

$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ とすると，

$P(0)=1$ より，$a_0=1$

よって，$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+1$

$n=0$ のとき

$P(x)=1$

これは $P(2)=0,\ P(1)=2$ を満たさない。よって，不適

$n=1$ のとき

$P(x)=x+1$

これは $P(2)=0$ を満たさない。よって，不適

$n=2$ のとき

$P(x)=x^2+a_1x+1$

$P(2)=0$ より，$4+2a_1+1=0$ すなわち $a_1=-\dfrac{5}{2}$

よって，$P(x)=x^2-\dfrac{5}{2}x+1$

ところが，これは $P(1)=2$ を満たさない。よって，不適

$n=3$ のとき

$P(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+1$

$P(2)=0$ より，$8+4a_2+2a_1+1=0$　$\therefore 2a_1+4a_2=-9$　・・・①

$P(1)=2$ より，$1+a_2+a_1+1=2$　$\therefore a_1+a_2=0$　・・・②

①かつ②より，$a_1=\dfrac{9}{2},\ a_2=-\dfrac{9}{2}$

よって，$P(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}x+1$

ゆえに，最も次数の低い $P(x)$ は $P(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}x+1$

15

整式x^{2n}をx^2+x+1で割った商を$Q(x)$，余りを$ax+b$（aとbは実数）とすると，

$x^{2n}=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$ ・・・①

$x^2+x+1=0$の判別式をDとすると，$D=-3<0$より，$x^2+x+1=0$の解は虚数であり，

その解をωとおくと$\omega^2+\omega+1=0$ ・・・②

よって，①，②より，$\omega^{2n}=a\omega+b$ ・・・③

さらに，$x^3-1=(x+1)(x^2+x+1)$より，$\omega^3-1=0$ すなわち$\omega^3=1$ ・・・④

$n=3k$のとき

③の左辺は，④より，$\omega^{2n}=\omega^{2\cdot 3k}=(\omega^3)^{2k}=1$

よって，③は$1=a\omega+b$ すなわち$a\omega+b-1=0$

ωは虚数だから，$a=0$，$b=1$

よって，余りは1 ・・・$\boxed{ア}$

$n=3k+1$のとき

③の左辺は，②と④より，$\omega^{2n}=\omega^{2\cdot(3k+1)}=(\omega^3)^{2k}\cdot\omega^2=\omega^2=-\omega-1$

よって，③は$-\omega-1=a\omega+b$ すなわち$(a+1)\omega+b+1=0$

ωは虚数だから，$a=-1$，$b=-1$

よって，余りは$-x-1$ ・・・$\boxed{イ}$

$n=3k+2$のとき

③の左辺は，④より，$\omega^{2n}=\omega^{2\cdot(3k+2)}=(\omega^3)^{2k+1}\cdot\omega=\omega$

よって，③は$\omega=a\omega+b$ すなわち$(a-1)\omega+b=0$

ωは虚数だから，$a=1$，$b=0$

よって，余りはx ・・・$\boxed{ウ}$

16

(1)

解法 1

多項式$f(x)$が$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$を満たすことから，$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)$は多項式である。

よって，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n\neq 0)$とおくと，

$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)$が多項式であるためにはその最も次数の低い項の次数が0以上であることが必要。

これと，最も次数の低い項の次数は，$x^4\cdot a_nx^{-n}=a_nx^{4-n}$より，$4-n$であることから，

$4-n\geq 0$すなわち$n\leq 4$

よって，$f(x)$の次数は4以下である。

解法 2

$f(x)$ の次数を n，最も次数の低い項の次数を $n-m$ $(0 \leq m \leq n)$ とすると，

恒等式 $x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$ において，左辺の次数は $4+\{-(n-m)\}=4-n+m$

これと右辺 $f(x)$ の次数が n であることから， $4-n+m=n$ $\quad \therefore n=\dfrac{m+4}{2}$

また， $0 \leq m \leq n$ より， $2 \leq \dfrac{m+4}{2} \leq \dfrac{n+4}{2}$

よって， $2 \leq n \leq \dfrac{n+4}{2}$ より， $n=2,\ 3,\ 4$

ゆえに， $f(x)$ の次数は 4 以下である。

(2)

(1)より， $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とおく。

すると，(A)の恒等式は $x^4\left\{a\left(\dfrac{1}{x}\right)^4+b\left(\dfrac{1}{x}\right)^3+c\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+d\cdot\dfrac{1}{x}+e\right\}=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

すなわち $ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $\quad \therefore a=e,\ b=d$

よって， $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ ・・・①

(B)の恒等式は，①より，

$a(1-x)^4+b(1-x)^3+c(1-x)^2+b(1-x)+a=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$

これに， $x=0$ を代入すると， $a+b+c+b+a=a$ $\quad \therefore a+2b+c=0$ ・・・②

$x=-1$ を代入すると， $16a+8b+4c+2b+a=a-b+c-b+a$ $\quad \therefore 5a+4b+c=0$ ・・・③

また，(C)については，①より， $a+b+c+b+a=1$ $\quad \therefore 2a+2b+c=1$ ・・・④

②，③，④の連立方程式を解くことにより， $a=1,\ b=-2,\ c=3$

これを①に代入することにより， $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

逆に， $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$ とすると，(A),(B),(C)が成り立つ。

よって， $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$